

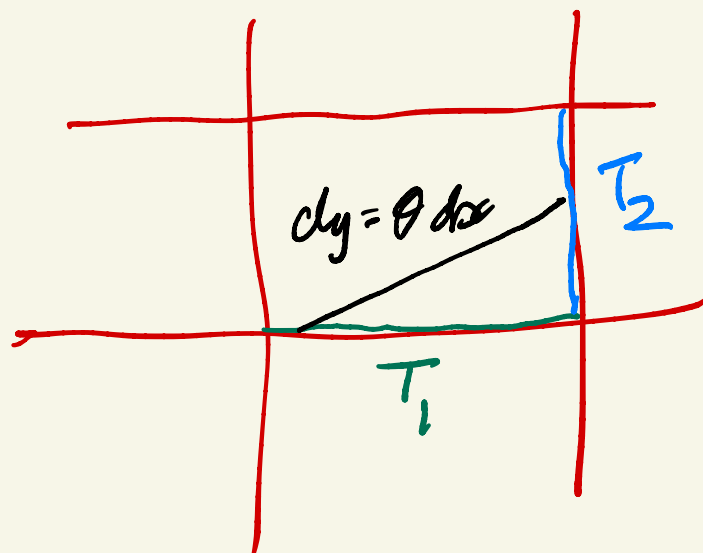
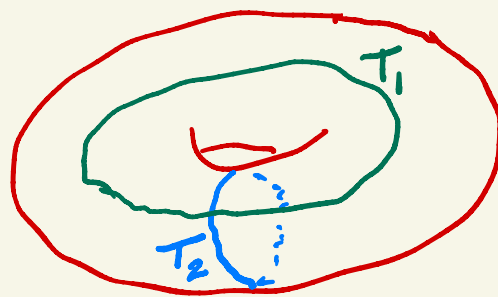
**Working with Paul Baum :
Kingston, K -Theory, and Beyond**

Alain Connes

**Fields Institute
30 July 2026**

Plan

- ▶ Kingston 1980. Transversal $\rightarrow$ Finite projective modules one can see!
- ▶ Kingston 1980. Baum-Douglas (M, E, f) theory
- ▶ The Assembly Map : Interplay of Homotopy and NCG
- ▶ Interplay topos theory and NCG



$$\mathbb{R} \rightarrow T_1 \times T_2$$

$$t \mapsto (t/\mathbb{Z}, \theta t/\mathbb{Z})$$

$\theta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sigma$ is injective -

$(x, 0) \sim (0, y)$ same leaf (flow line)

$$\Downarrow$$

$$\exists t, x+t \in \mathbb{Z}, t\theta = y \bmod \mathbb{Z}$$

Thurston (ac 1980)

$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ finite projective module over $C^0(T_\theta^2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dimension} = \theta \\ \text{Covolume} = \frac{2\pi}{\theta} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Integrality}$$

Integrality $\implies$ Index Theorem

$$U_1 U_2 = \lambda U_2 U_1, \quad \lambda = \exp(i2\pi\theta)$$

$$(\xi U_1)(s) = \xi(s+\theta), \quad (\xi U_2)(s) = \exp(i2\pi s)\xi(s)$$

$$D_1 f = \frac{d}{ds} f \qquad D_2 f(s) = \frac{2\pi i s}{\theta} f(s)$$

The 1980 Comptes Rendus Note

We introduced the algebra $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$ and established that the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is a finite projective module over it.

The surprising integrality of the product

$$\text{Dimension} \times \text{Curvature} = \theta \times 1/\theta$$

led to an index theorem and the Chern character in cyclic cohomology.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — C^* algèbres et géométrie différentielle. Note (*)
de **Alain Connes**, Correspondant de l'Académie.

Nous définissons l'analogue des notions de connexion, courbure et classes de Chern pour les C^* systèmes dynamiques (A, G, α) , où G est un groupe de Lie. Nous appliquons le théorème de l'indice correspondant au calcul de l'indice d'opérateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de la forme $\sum A_{ij} \nabla_1^i \nabla_2^j$, où A_{ij} est un opérateur aux différences finies, ∇_1 est la dérivation, $\nabla_1 f = f' \cdot \forall f \in \mathcal{S}$ et $(\nabla_2 f)(s) = sf(s)$, $\forall f \in \mathcal{S}$.

We introduce the analogue of the notions of connection, curvature and Chern classes for C^* dynamical systems (A, G, α) , where G is a Lie group. We apply the corresponding index theorem to the computation of the index of operators in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ of the form $\sum A_{ij} \nabla_1^i \nabla_2^j$, where A_{ij} is a finite difference operator, ∇_1 is ordinary differentiation: $\nabla_1 f = f'$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and $(\nabla_2 f)(s) = sf(s)$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

INTRODUCTION. — La théorie des C^* algèbres constitue une généralisation de la topologie des espaces localement compacts. Une grande partie de la théorie a été occupée par l'analogue de l'étude des mesures de Radon. Parmi les invariants de la topologie algébrique, c'est la K théorie qui s'adapte le mieux au cadre des C^* algèbres. L'étude de l'analogue d'une structure différentielle sur l'espace localement compact X a été proposée dans [6] comme l'étude des dérivations d'une C^* algèbre A . Dans cette Note nous développons les notions de base de topologie différentielle dans le cas particulier où la structure différentielle est obtenue par l'action d'un groupe de Lie G , par automorphismes, sur A . Généralisant les notions de connexion sur un fibré, courbure et classes de Chern, nous construisons, étant donnée une trace G -invariante τ , un morphisme ch_τ de $K_0(A)$ dans $H_n^*(G)$, (cohomologie des formes différentielles invariantes à gauche sur G). Nous généralisons ensuite le théorème de l'indice. Toute cette étude est motivée par un exemple simple, celui de la C^* algèbre A_θ de la rotation irrationnelle d'angle θ . Celle-ci est loin d'être commutative, étant simple et non de type I, et Pimsner et Voiculescu ont calculé $K(A_\theta)$ [3]. Nous munissons d'abord A_θ de la structure différentielle provenant de l'action évidente du groupe compact T^2 , $T = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, puis nous montrons que l'espace des sections de classe C^∞ du fibré de dimension θ sur A_θ s'identifie avec l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sur lequel A_θ agit par des opérateurs aux différences finies. Les opérateurs

$$D_1 f = \frac{d}{dt} f \quad \text{et} \quad D_2 f = \frac{2\pi i t}{\theta} f$$

définissent alors une connexion (de courbure constante $1/\theta$) et le théorème de l'indice permet de calculer l'indice (à valeurs entières) d'opérateurs polynômes en D_1, D_2 à coefficients opérateurs aux différences finies.

Soit (A, G, α) un C^* système dynamique, où G est un groupe de Lie. On dit que $x \in A$ est de classe C^∞ ssi l'application $g \mapsto \alpha_g(x)$ de G dans l'espace normé A est de classe C^∞ . L'algèbre involutive $A^\infty = \{x \in A, x \text{ de classe } C^\infty\}$ est dense en norme dans A .

Soit Ξ^∞ un module (nous l'écrivons comme module à droite) projectif de type fini sur A^∞ ; $\Xi^0 = \Xi^\infty \otimes_{A^\infty} A$ est alors un module projectif de type fini sur A .

LEMME 1. — Pour tout module projectif de type fini Ξ sur A , il existe un module projectif de type fini Ξ^∞ sur A^∞ , unique à isomorphisme près, tel que Ξ soit isomorphe à $\Xi^\infty \otimes_{A^\infty} A$.

Dans la suite, Ξ^∞ désigne un module projectif de type fini sur A^∞ . On appelle structure hermitienne sur Ξ^∞ la donnée d'une forme hermitienne positive $\langle \xi, \eta \rangle \in A^\infty$, $\forall \xi, \eta \in \Xi^\infty$ telle que

$$\langle \xi \cdot x, \eta \cdot y \rangle = y^* \langle \xi, \eta \rangle x, \quad \forall \xi, \eta \in \Xi^\infty, \quad \forall x, y \in A^\infty.$$

***K*-Homology : Analytic Visions**

- **Atiyah** : Formulated *K*-homology analytically via generalized elliptic pseudo-differential operators.
- **Brown, Douglas, Fillmore** : Formulated *K*-homology in terms of extension theory of C^* -algebras.
- **Kasparov** : Subsumed this into the profound bivariant framework of *KK-theory*, using Fredholm modules (*K*-homology as $KK(A, \mathbb{C})$).

K -Homology : Geometric Vision

Paul (with R. Douglas) was building a purely geometric presentation of K -homology.

Geometric K -Homology (Baum-Douglas)

Cycles for a space X are given by triples (M, E, f) where :

- M is a compact $Spin^c$ manifold,
- E is a complex vector bundle over M ,
- $f : M \rightarrow X$ is a continuous map.

This provided the exact geometric left-hand side for the assembly map.



P. Baum and A. Connes : "Leafwise homotopy equivalence and rational Pontrjagin classes," pp. 1-14 in Foliations (Tokyo, 14-18 July 1983). Edited by I. Tamura. Advanced Studies in Pure Mathematics 5. North-Holland (Amsterdam),

1986 P. Baum and A. Connes : " K theory for actions of discrete groups," pp. 1-12 in Conferencias del taller de topología algebraica [Conferences of the algebraic topology workshop].

1988 P. Baum and A. Connes : "Chern character for discrete groups," pp. 163-232 in A fête of topology : Papers dedicated to Itiro Tamura. Edited by Y. Matsu moto, T. Mizutani, and S. Morita. Academic Press (Boston), 1988.

P. Baum and A. Connes : " K -theory for discrete groups," pp. 1-20 in Operator algebras and applications (Warwick, UK, 20-25 July 1987), vol. 1 : Structure theory ; K -theory, geometry and topology.

P. Baum, A. Connes, and N. Higson : " Classifying space for proper actions and K -theory of group C^* -algebras," pp. 241-291 in C^* -algebras : 1943-1993 (San Antonio, TX, 13-14 January 1993). Edited by R. S. Doran. Contemporary Mathematics 167. American Mathematical Society (Providence, RI), 1994.

P. Baum and A. Connes : " Geometric K -theory for Lie groups and foliations," Enseign. Math. (2) 46 : 1-2 (2000), pp. 3-42.

The Assembly Map : Interplay of Homotopy and NCG

The interplay between the world of homotopy theory and noncommutative geometry is best illustrated by the applications of the injectivity or surjectivity of the assembly map.

The geometric and analytical consequences split naturally depending on which property of the map we invoke.

Baum-Connes Assembly Map

$$\mu : K_*^\Gamma(\underline{E}\Gamma) \rightarrow K_*(C_r^*(\Gamma))$$

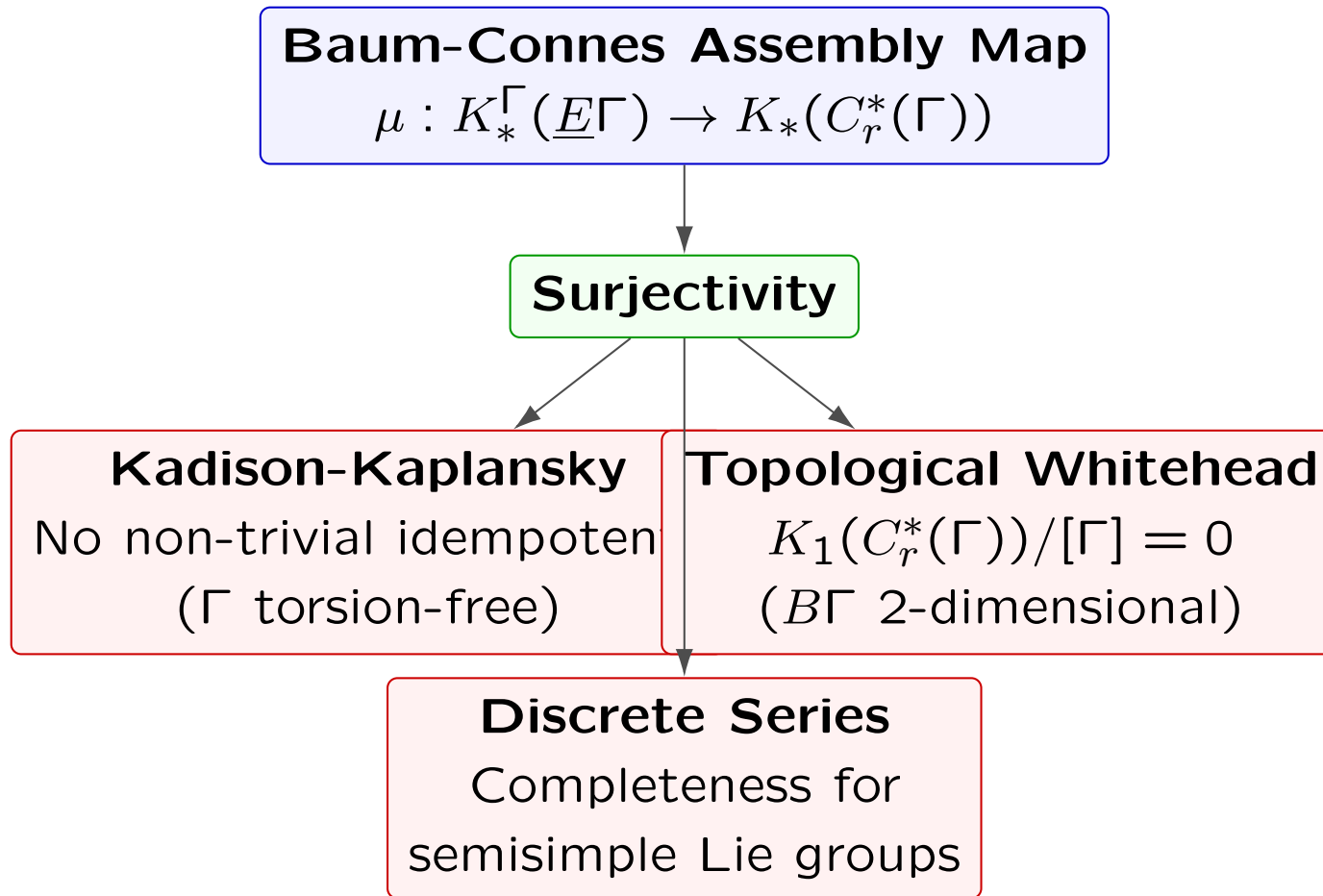
Injectivity

Novikov Conjecture

Homotopy invariance
higher signatures

Gromov-Lawson-Rosenberg

$$\text{PSC} \implies \hat{A}_x(M) = 0$$



Beyond Discrete Groups

P. Baum, N. Higson, and R. Plymen : " A proof of the Baum-Connes conjecture for p adic $GL(n)$," C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 325 : 2 (July 1997)

— **Real Lie groups**

— p -**adic groups**

In all these situations, the assembly map creates a very non-trivial relation :

Representation Theory

$\longleftrightarrow$

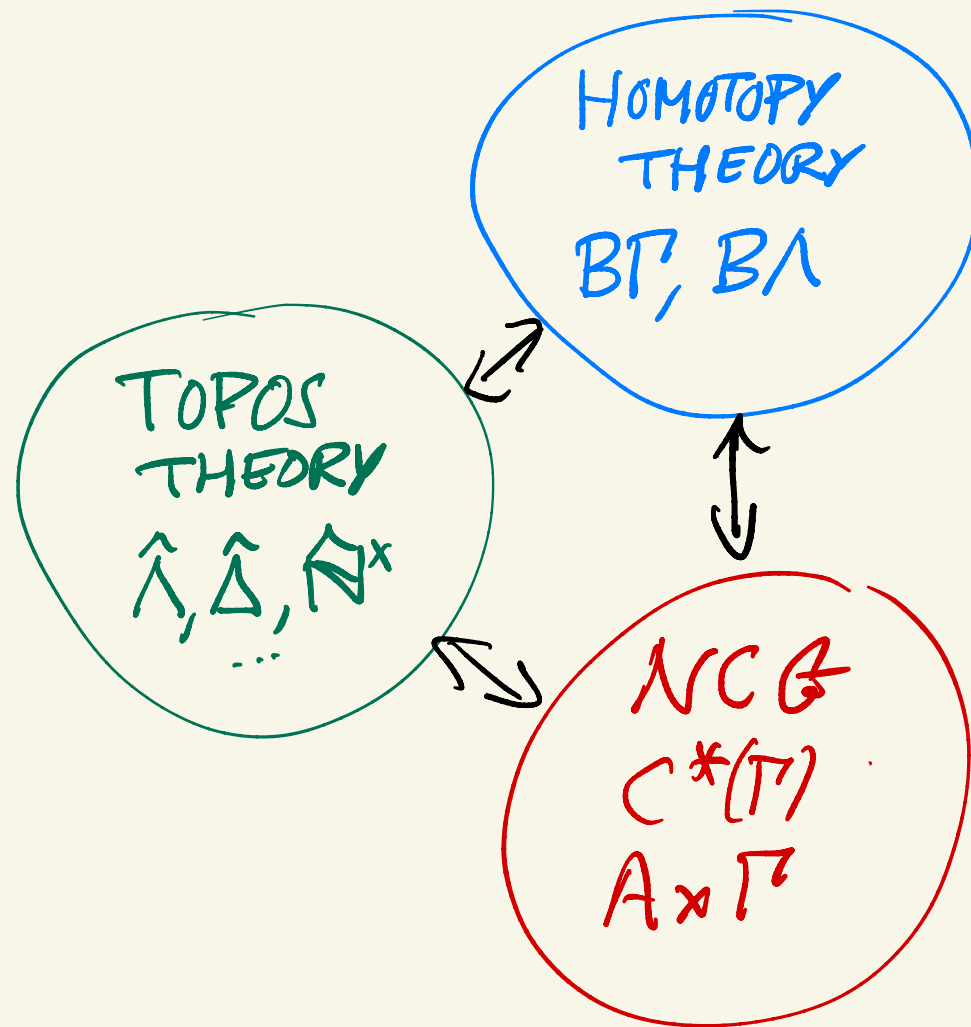
Noncommutative Geometry

Yu, Guoliang The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.* 139 (2000), no. 1, 201-240.

G. Higson et G. Kasparov, E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space, *Invent. Math.*, vol. 144, 2001, p. 23-74

V. Lafforgue, La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes hyperboliques. (French) [The Baum-Connes conjecture with coefficients for hyperbolic groups] *J. Noncommut. Geom.* 6 (2012), no. 1, 1-197.

G. Mislin et A. Valette, Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture, Birkhäuser, 2012



Topos Theory vs. Homotopy Theory

In which sense is the Topos viewpoint more refined than Homotopy ?

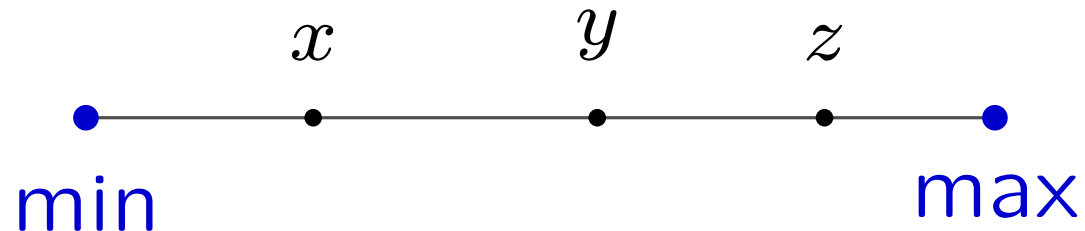
Consider the simplex category Δ (finite ordinals $\{0, \dots, n\}$, non-decreasing maps).

The Homotopy Viewpoint :

- Δ has a final object.
- Its classifying space (Quillen) is a singleton :
 $B\Delta \simeq *$.

The Topos Viewpoint :

- The topos of presheaves $\widehat{\Delta} = \text{Set}^{\Delta^{op}}$ is highly non-trivial.
- Its *points* are “abstract intervals”.
- It is the classifying topos for the logical structure of totally ordered sets with a minimum and a maximum.



$$\min \leq x \leq y \leq z \leq \max$$

The Scaling Site

To link Noncommutative Geometry and Topos Theory, we introduce the **Scaling Site**.

(A. Connes & C. Consani, 2014)

It is defined as the semidirect product :

$$[0, \infty) \rtimes \mathbb{N}^\times$$

where the positive integers $\mathbb{N}^\times$ act on the half real line $[0, \infty)$ by multiplication.

The Noncommutative Space $X_{\mathbb{Q}}$

Consider the noncommutative space $X_{\mathbb{Q}}$. It can be described in two equivalent ways :

1. Algebraic Description :

The double quotient of the adeles of $\mathbb{Q}$:

$$X_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\times} \backslash \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} / \hat{\mathbb{Z}}^{\times}$$

2. Geometric Description :

The set of **rank one subgroups of $\mathbb{R}$** (adjoining the isomorphism classes of such groups).

Classically, this space is completely intractable. Non-commutatively, it possesses a rich, precise geometric structure.

Periodic orbits C_p

Finite set of places $S \ni \infty, p_j \in S$,

$$X_{\mathbb{Q},S} := \Gamma \backslash \left(\prod_S \mathbb{Q}_v \right) / \prod_{S \setminus \infty} \mathbb{Z}_p^*$$

where

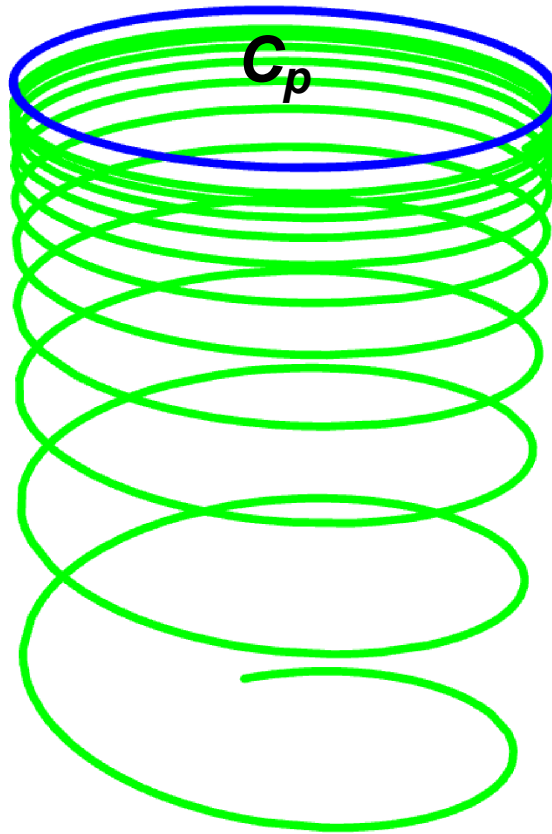
$$\Gamma := \{ \pm p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} \mid n_j \in \mathbb{Z} \}$$

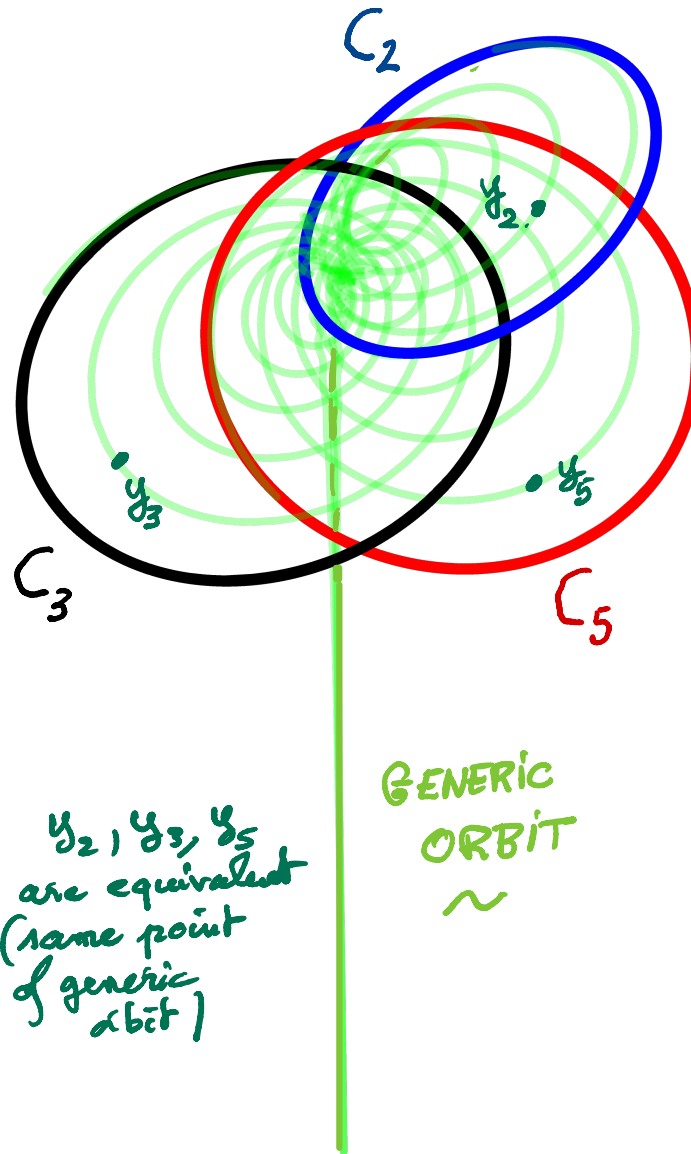
The group $\mathbb{R}_+^*$ acts on $X_{\mathbb{Q},S}$,

Generic orbit : Free action on x with $x_v \neq 0$ for all v .

Periodic orbits : $x_p = 0$ & $x_v \neq 0 \rightarrow C_p = p^{\mathbb{Z}} \backslash \mathbb{R}_+^*$

Generic orbit dense in C_p





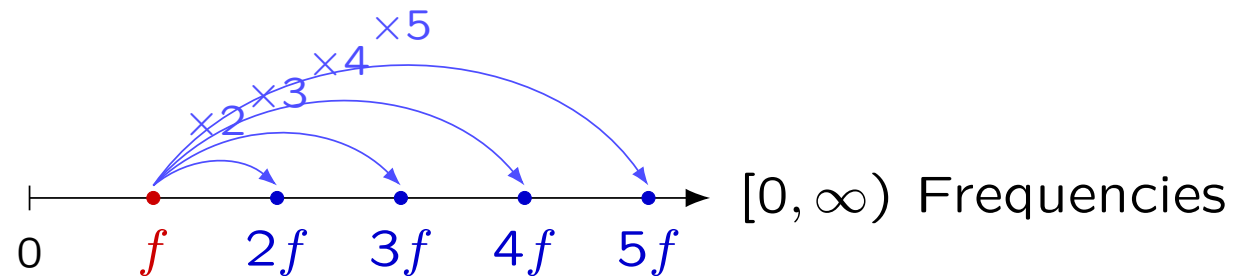
Mathematics, Music, and the Zeros of Zeta

The deepest relation I know between mathematics and music is encapsulated in the following identity **(ac+cc)** :

The set of points of the Scaling Site
=
The noncommutative space $X_{\mathbb{Q}}$

The Musical Metaphor

Action of $\mathbb{N}^\times$ (Harmonics)



- $[0, \infty)$ encodes the **frequencies**.
- $\mathbb{N}^\times$ encodes the **harmonics**.

The scaling site is the mathematical idealization of a musical instrument.

The Consequence

This space reaches the deepest part of mathematics. It gives direct access to the **zeros of the Riemann zeta function** as an *absorption spectrum* with absolutely no need to define the zeta function itself!

Happy 90's
Dear Paul !

*Thank you for 46 years of
profound mathematics
and friendship !*