On Universal 1D Reversible Cellular Automata

Kenichi Morita
Hiroshima University

Outline of the Talk

- A reversible (injective) cellular automaton (RCA) is a CA whose global function is one-to-one.
- In spite of the strong restriction of reversibility, they have rich ability of computing: e.g.,
  - Computation-universality
  - Self-reproduction
  - Synchronization

Outline of the Talk

- A reversible (injective) cellular automaton (RCA) is a CA whose global function is one-to-one.
- In spite of the strong restriction of reversibility, they have rich ability of computing: e.g.,
  - Computation-universality
  - Self-reproduction
  - Synchronization

Today's topic (a survey and a new result):

- How can we find *simple computation-universal 1D RCAs*?

Computation-Universal 1D RCAs

- Simulating reversible Turing machines (RTMs):
  - Any RTM can be simulated by an RCA.
    [Morita and Harao, 1989]
    (Note: There is a universal RTM.)
- Simulating cyclic tag systems:
  - 30-state 1W-RCA (on infinite configurations)
  - 98-state 2W-RCA (on finite configurations)
    [Morita, AUTOMATA 2005, 2006]
  - 80-state 1W-RCA with 1-bit communication channel (on infinite configurations)
    [Morita, AUTOMATA 2007]

Contents

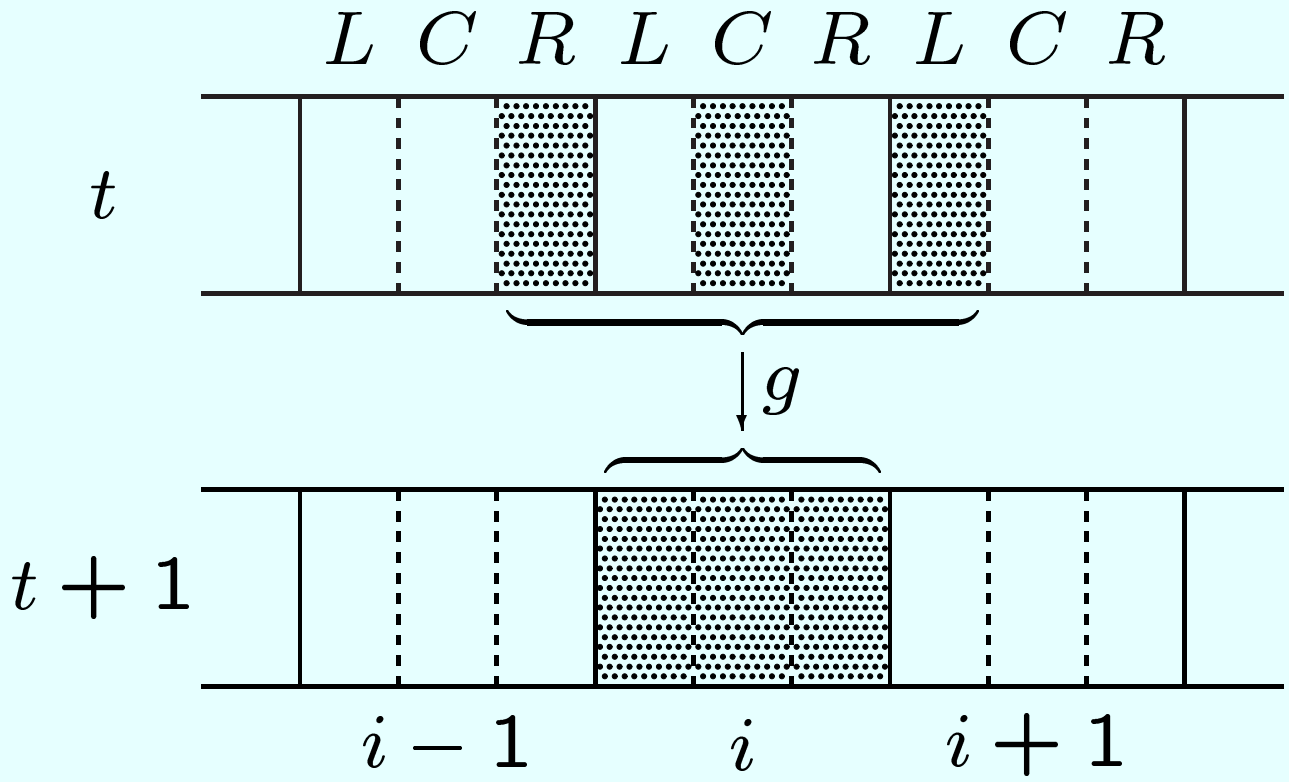
1. Some Definitions
— Partitioned CAs (PCAs) —

How Can We Design RCAs?)

- Reversibility of CA is decidable [Amoroso and Patt, 1972], but, in general, it is difficult to give RCAs by using a conventional framework of CAs.
- There are several design methods of RCAs.
  - Block CA (Margolus neighborhood)
  - Partitioned CA (PCA)
  - Second-order CA
  - etc.

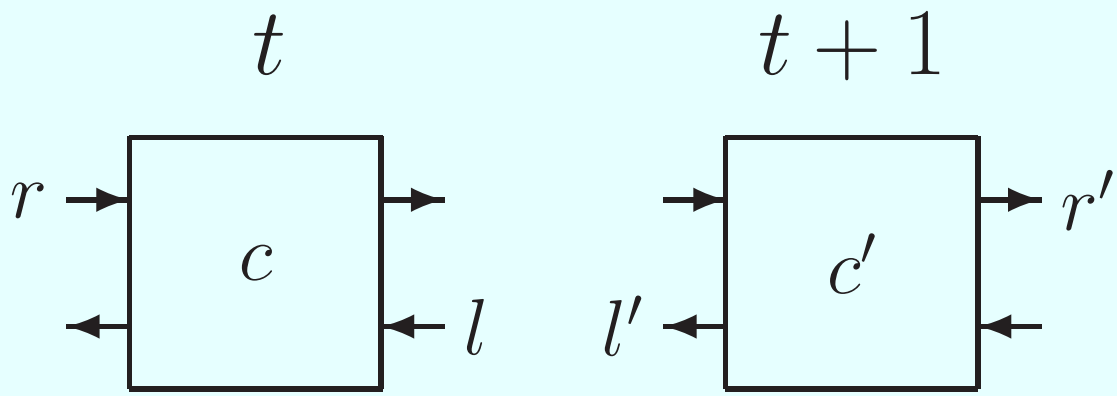
Partitioned Cellular Automata (PCAs)

- 1D Partitioned CA (PCA)



The local function g of a 1D PCA.

Each Cell of a PCA Can Be Regarded as a Sequential Machine (of Mealy Type)



$$g(r, c, l) \;=\; (l', c', r')$$

C: the state-set of the finite-state control.

L and R: the input/output alphabets.

Some Definitions on a 1D PCA

$$P = (\mathbf{Z}, (L, C, R), g, (\#, \#, \#))$$

- The global function G:

$$\forall x \in \mathbf{Z}:$$
$$G(\alpha)(x) = g(\texttt{RIGHT}(\alpha(x-1)), \texttt{CENTER}(\alpha(x)), \texttt{LEFT}(\alpha(x+1)))$$

- P is globally reversible iff G is one-to-one.
- P is locally reversible iff g is one-to-one.

Properties of 2D PCA

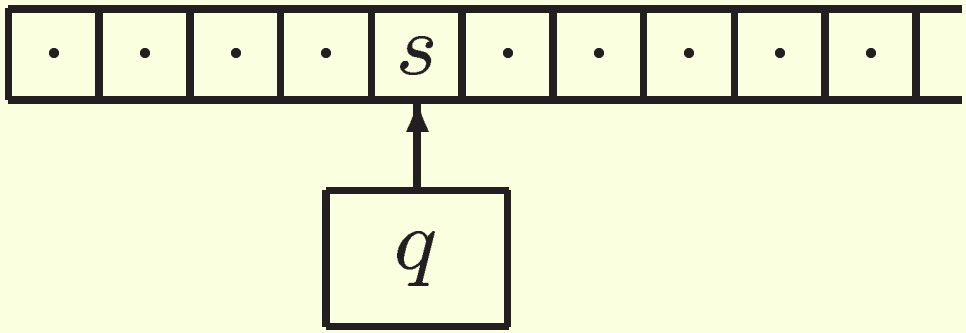
Proposition [Morita and Harao, 1989]
Let P be a PCA. P is globally reversible iff it is locally reversible.

In other words, the PCA P is globally reversible, iff the associated sequential machine is reversible.

2. RCAs That Simulate RTMs

Reversible Turing Machines (RTMs)

A "backward deterministic" TM.



Definition of a TM

$$T = (Q, S, q_0, q_f, s_0, \delta)$$

Q: a finite set of states.

S: a finite set of tape symbols.

q_0: an initial state $q_0 \in Q$.

q_f: a final state $q_f \in Q$.

s_0: a blank symbol $s_0 \in S$.

δ: a move relation given by a set of quintuples $[p, s, s', d, q] \in Q \times S \times S \times \{-, 0, +\} \times Q$.

Definition of an RTM

A TM $T = (Q, S, q_0, q_f, s_0, \delta)$ is called *reversible* iff the following condition holds for any pair of distinct quintuples $[p_1, s_1, s'_1, d_1, q_1]$ and $[p_2, s_2, s'_2, d_2, q_2]$.

$$\text{If } q_1 = q_2, \text{ then } s'_1 \neq s'_2 \wedge d_1 = d_2$$

(If the next states are the same, then the written symbols must be different and the shift directions must be the same.)

Universality of RTMs

Theorem [Bennett, 1973]
For any (irreversible) TM, there is a reversible TM that simulates the former.

Reversible PCAs That Simulate RTMs

Theorem [Morita and Harao, 1989]
For any one-tape RTM, there is a reversible PCA that simulates the former.

Note: By this method, an m-state n-symbol RTM (in quintuple form) is simulated by a $2(m+1)^2n$-state reversible PCA.

A Simple Example of an RTM

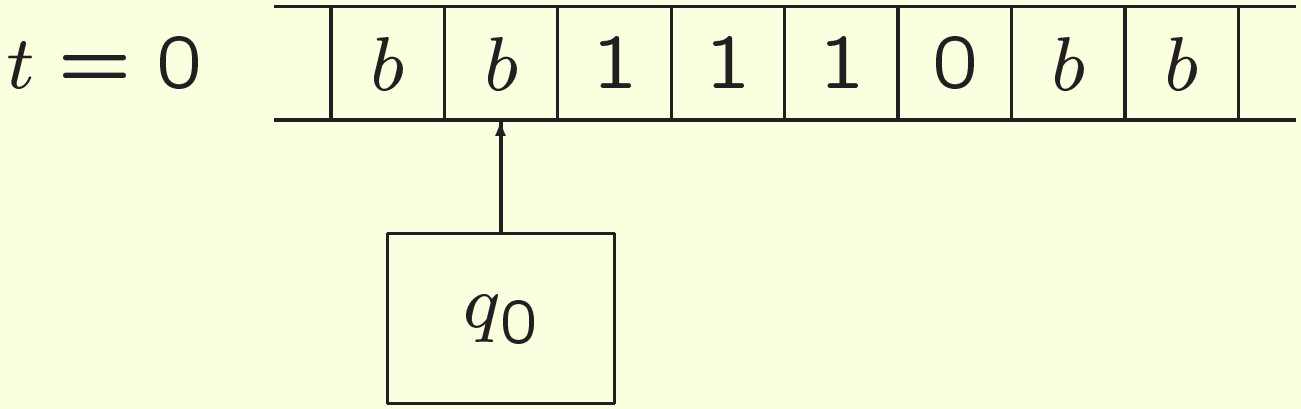
$$T_{\mathsf{mod}\,3} = (Q, \{b, 0, 1, 2\}, q_0, q_f, b, \delta),$$

$Q = \{q_0, \cdots, q_6, q_f\}$.
δ is as below:

$$\begin{aligned}
\delta = \{ \ & [\ q_0, b, b, +, q_3\ ], \\
& [\ q_1, b, b, +, q_4\ ],\ [\ q_1, 0, 0, +, q_2\ ],\ [\ q_1, 1, 1, +, q_3\ ], \\
& [\ q_2, b, b, +, q_5\ ],\ [\ q_2, 0, 0, +, q_1\ ],\ [\ q_2, 1, 1, +, q_2\ ], \\
& [\ q_3, b, b, +, q_6\ ],\ [\ q_3, 0, 0, +, q_3\ ],\ [\ q_3, 1, 1, +, q_1\ ], \\
& [\ q_4, b, 1, -, q_f\ ],\ [\ q_5, b, 2, -, q_f\ ],\ [\ q_6, b, 0, -, q_f\ ]\ \}.
\end{aligned}$$

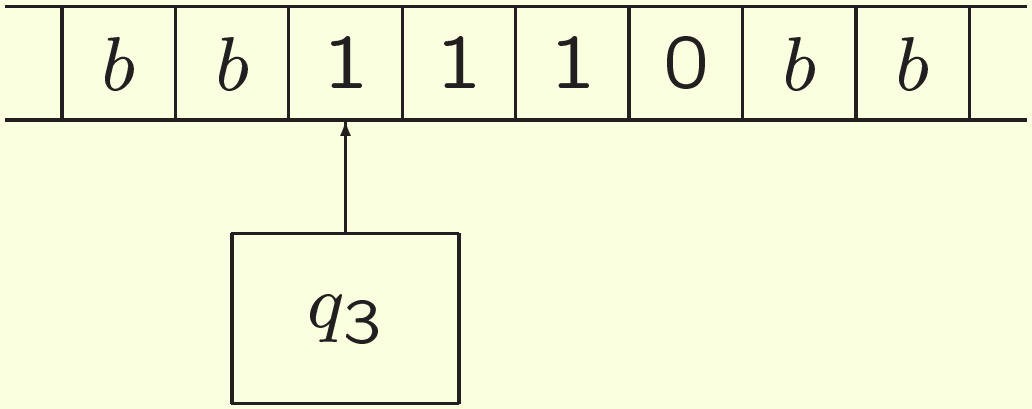
For a given binary number n on the tape, $T_{\mathsf{mod}\,3}$ computes (n mod 3) and writes it on the tape.

Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$



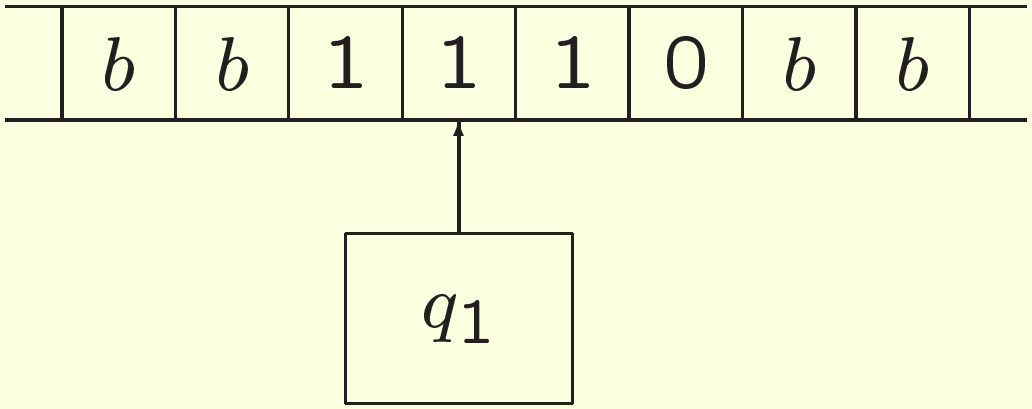
Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$

$t = 1$



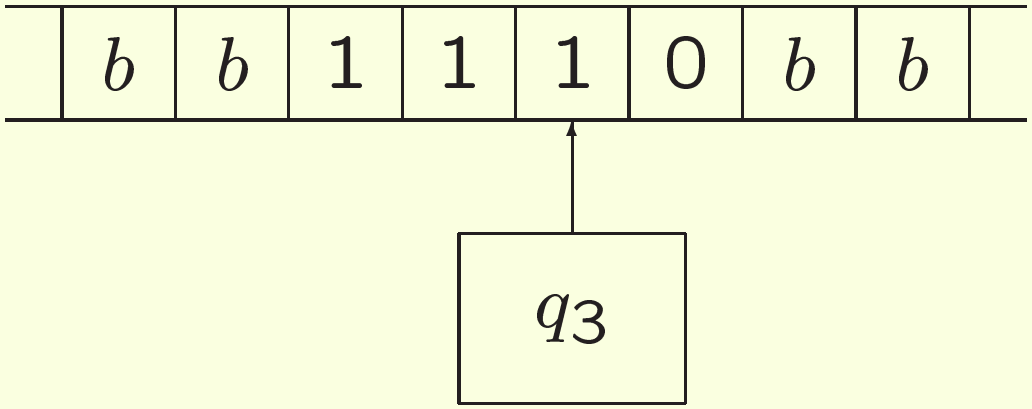
Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$

$t = 2$



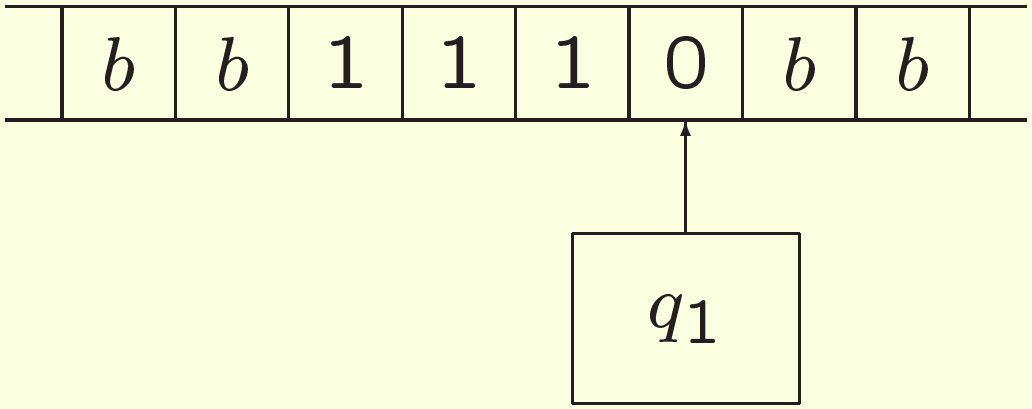
Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$

$t = 3$



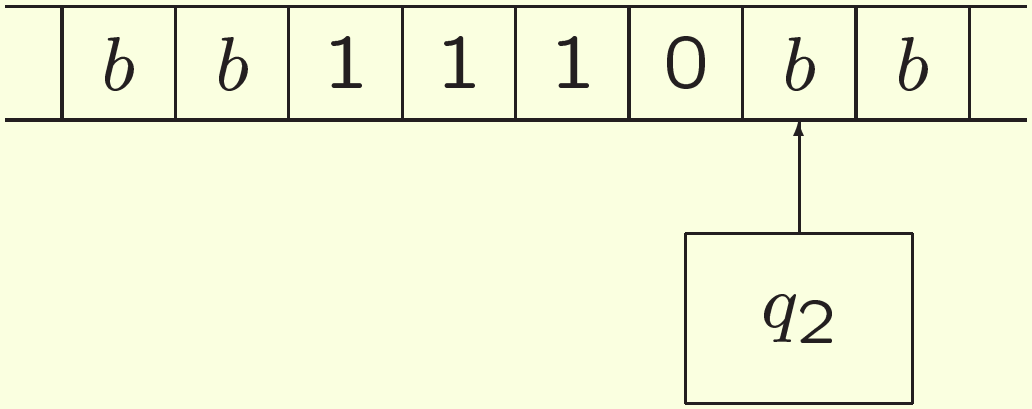
Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$

$t = 4$



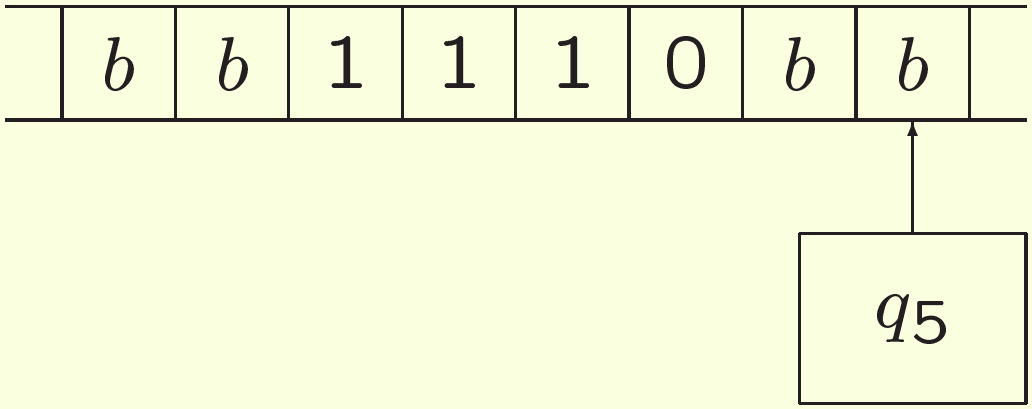
Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$

$t = 5$

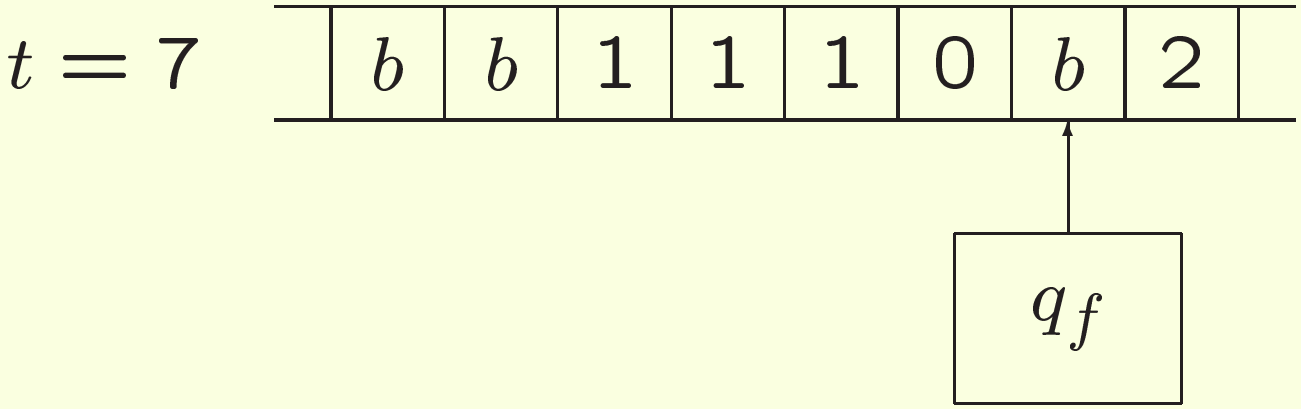


Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$

$t = 6$



Computation of the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$



Simulating the RTM $T_{\mathsf{mod}\,3}$ by an RPCA

$t=0$		b	q_0		$\hat{b}$			1			1			1			0			b			b	
$t=1$		b			b	q_3		1			1			1			0			b			b	
$t=2$		b			b			1	q_1		1			1			0			b			b	
$t=3$		b			b			1			1	q_3		1			0			b			b	
$t=4$		b			b			1			1			1	q_1		0			b			b	
$t=5$		b			b			1			1			1			0	q_2		b			b	
$t=6$		b			b			1			1			1			0			b	q_5		b	
$t=7$		b			b			1			1			1			0			b		q_f	2	
$t=8$		b			b			1			1			1			0		q_f	$\hat{b}$			2	
$t=9$		b			b			1			1			1		q_f	$\hat{0}$			$\hat{b}$			2	
$t=10$		b			b			1			1		q_f	$\hat{1}$			$\hat{0}$			$\hat{b}$			2	
$t=11$		b			b			1		q_f	$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{0}$			$\hat{b}$			2	
$t=12$		b			b		q_f	$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{0}$			$\hat{b}$			2	
$t=13$		b		q_f	$\hat{b}$			$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{0}$			$\hat{b}$			2	
$t=14$	q_f	$\hat{b}$			$\hat{b}$			$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{1}$			$\hat{0}$			$\hat{b}$			2	

A Small Universal RTM (URTM)

A URTM is an RTM that can compute *any* recursive function.

Theorem [Morita and Yamaguchi, to appear] There is a 17-state 5-symbol URTM.

Corollary There is a 3240-state universal RCA (on finite configurations).

3. RCAs That Simulate Cyclic Tag Systems

Universal Reversible CAs
— 1D Case —

- 30-state 1-way RCA (on infinite configurations)
  [Morita, AUTOMATA 2006]
- 98-state 2-way RCA (on finite configurations)
  [Morita, AUTOMATA 2005]
- 80-state 1-way RCA with 1-bit communication channel (on infinite configurations)
  [Morita, AUTOMATA 2007]

Cyclic Tag System (CTAG) [Cook, 2004]

$$C = (k, \{Y, N\}, (p_0, \cdots, p_{k-1}))$$

- k: the length of a cycle (positive integer).
- $\{Y, N\}$: the alphabet used in a CTAG.
- $(p_0, \cdots, p_{k-1}) \in (\{Y, N\}^*)^k$: production rules.

In a CTAG, the rules are applied cyclically.

An *instantaneous description* (ID) is a pair (v, i), where $v \in \{Y, N\}^*$ and $i \in \{0, \cdots, k-1\}$.

For any $(v, i), (w, j) \in \{Y, N\}^* \times \{0, \cdots, k-1\}$,

$$(Yv, i) \Rightarrow (w, j) \text{ iff } [j = i + 1 \bmod k] \wedge [w = vp_i],$$
$$(Nv, i) \Rightarrow (w, j) \text{ iff } [j = i + 1 \bmod k] \wedge [w = v].$$

A Simple Example of a CTAG System

$$C_1 = (3, \{Y, N\}, (Y,\ NY,\ YY))$$

If an initial word NYY is given, the computing on C_1 proceeds as follows:

$$\begin{array}{lll}
 & (\ N\ Y\ Y\ , & 0\ ) \\
\Rightarrow & (\ \ \ Y\ Y\ , & 1\ ) \\
\Rightarrow & (\ \ \ \ \ Y\ N\ Y\ , & 2\ ) \\
\Rightarrow & (\ \ \ \ \ \ \ N\ Y\ Y\ Y\ , & 0\ ) \\
\Rightarrow & (\ \ \ \ \ \ \ \ \ Y\ Y\ Y\ , & 1\ ) \\
\Rightarrow & (\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ Y\ Y\ N\ Y\ , & 2\ ) \\
\Rightarrow & \ \ \ldots &
\end{array}$$

(Note) Halting of a CTAG will be discussed later.

A 30-state RPCA That Simulates Any CTAG

$$P_{30} = (\mathbf{z}, (\{\#\}, \{\#, Y, N, +, -, \cdot\}, \{\#, y, n, +, -\}), g_{30}, (\#, \#, \#))$$

g_{30}:

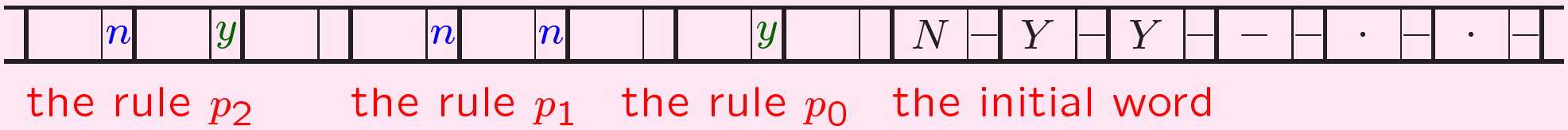
$\#$ $\#$	$\rightarrow$	$\#$ $\#$		$+$ $-$	$\rightarrow$	$+$ $-$
y $\#$	$\rightarrow$	$\#$ y		$-$ $-$	$\rightarrow$	$-$ $-$
n $\#$	$\rightarrow$	$\#$ n		$+$ $+$	$\rightarrow$	$+$ $+$
$\#$ Y	$\rightarrow$	$\#$ $+$		$-$ $+$	$\rightarrow$	$-$ $+$
$\#$ N	$\rightarrow$	$\#$ $-$		y $-$	$\rightarrow$	$-$ y
$+$ Y	$\rightarrow$	Y $+$		n $-$	$\rightarrow$	$-$ n
$+$ N	$\rightarrow$	N $+$		y $+$	$\rightarrow$	Y $\#$
$-$ Y	$\rightarrow$	Y $-$		n $+$	$\rightarrow$	N $\#$
$-$ N	$\rightarrow$	N $-$		$\#$ $\bullet$	$\rightarrow$	$+$ n
y Y	$\rightarrow$	Y y		y $\bullet$	$\rightarrow$	$\bullet$ y
y N	$\rightarrow$	N y		n $\bullet$	$\rightarrow$	$\bullet$ n
n Y	$\rightarrow$	Y n		$-$ $\bullet$	$\rightarrow$	$\bullet$ $-$
n N	$\rightarrow$	N n		$+$ $\bullet$	$\rightarrow$	$\bullet$ $+$

Simulating a CTAG by an RPCA P_{30} (1)

Example Consider a CTAG C_3 with an initial word NYY.

$$C_2 = (3, \{Y, N\}, (Y,\ NN,\ YN))$$

Then, the initial configuration of P_{30} is as follows:



- Production rules should be sent to the rewritten word infinitely many times.
- Hence, an initial configuration is infinite.

Simulating a CTAG by an RPCA P_{30} (2)

	n		y				n		n				y			N	$-$	Y	$-$	Y	$-$	$-$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
			n		y				n		n				y		$-$	Y	$-$	Y	$-$	$-$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
	y				n		y				n		n				y	Y	$-$	Y	$-$	$-$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
			y				n		y				n		n			Y	y	Y	$-$	$-$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
	n				y				n		y				n		n		$+$	Y	y	$-$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
	n		n				y				n		y				n		n	Y	$+$	$-$	y	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
			n		n				y				n		y				n	Y	n	$+$	$-$	$\bullet$	y	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
	y				n		n				y				n		y			Y	n	N		$\bullet$	$-$	$\bullet$	y	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
	n		y				n		n				y				n		y		$+$	N	n	$+$	n	$\bullet$	$-$	$\bullet$	y	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
			n		y				n		n				y				n		y	N	$+$	N		$\bullet$	n	$\bullet$	$-$	$\bullet$	y	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$-$
	y				n		y				n		n				y				n	N	y	N	$+$	$+$	n	$\bullet$	n	$\bullet$	$-$	$\bullet$	y	$\bullet$	$-$
			y				n		y				n		n				y			N	n	N	y	$+$	$+$	$\bullet$	n	$\bullet$	n	$\bullet$	$-$	$\bullet$	y
	n				y				n		y				n		n				y		$-$	N	n	Y		$\bullet$	$+$	$\bullet$	n	$\bullet$	n	$\bullet$	$-$
	n		n				y				n		y				n		n				y	N	$-$	Y	n	$+$	n	$\bullet$	$+$	$\bullet$	n	$\bullet$	n
			n		n				y				n		y				n		n			N	y	Y	$-$	N		$\bullet$	n	$\bullet$	$+$	$\bullet$	n
	y				n		n				y				n		y				n		n		$-$	Y	y	N	$-$	$+$	n	$\bullet$	n	$\bullet$	$+$
	n		y				n		n				y				n		y				n		n	Y	$-$	N	y	$-$	$+$	$\bullet$	n	$\bullet$	n
			n		y				n		n				y				n		y				n	Y	n	N	$-$	$-$	y	$\bullet$	$+$	$\bullet$	n
	y				n		y				n		n				y				n		y			Y	n	N	n	$-$	$-$	$\bullet$	y	$\bullet$	$+$

A 98-state RPCA That Simulates Any CTAG

$$P_{98} = (\mathbf{Z}, (\{\#, e\}, \{\#, Y, N, +, -, \cdot, Y_1\}, \{\#, y, n, +, -, *, e\}), g_{98}, (\#, \#, \#))$$

g_{98}:

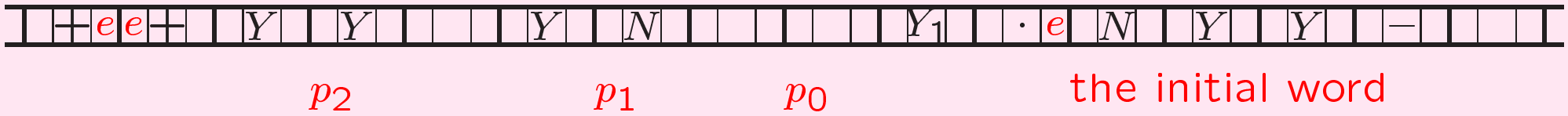
$\#$		$\#$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\#$	$\#$	$+$		N		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	N	$+$	e		$\bullet$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	e
$\#$		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y	$\#$	$-$		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y	$-$	e		N		$\#$	$\rightarrow$	e	N	$\#$
$\#$		N		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	N	$\#$	$-$		N		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	N	$-$	$\#$		$\bullet$		e	$\rightarrow$	e	$\bullet$	$\#$
$\#$		$+$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$+$	$\#$	y		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y	y	e		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y_1	$-$
$\#$		$-$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$-$	$\#$	y		N		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	N	y	$\#$		Y_1		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y_1	$\#$
$\#$		$\bullet$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	$\#$	n		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y	n	$\#$		$+$		e	$\rightarrow$	$\#$	$+$	e
y		$\#$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\#$	y	n		N		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	N	n	e		$+$		$\#$	$\rightarrow$	e	$+$	$\#$
n		$\#$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\#$	n	$+$		$+$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$+$	$+$	$\#$		Y_1		e	$\rightarrow$	e	Y_1	$\#$
$+$		$\#$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\#$	$+$	$+$		$-$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$+$	$-$	$\#$		Y		e	$\rightarrow$	e	Y	y
$-$		$\#$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\#$	$-$	$-$		$+$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$-$	$+$	$\#$		N		e	$\rightarrow$	e	N	n
y		$\bullet$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	y	$-$		$-$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$-$	$-$	$\#$		$\#$		e	$\rightarrow$	e	$\#$	$-$
n		$\bullet$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	n	y		$+$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y	$*$	e		$+$		e	$\rightarrow$	e	$+$	$+$
$*$		$\bullet$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	$*$	n		$+$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	N	$*$	$+$		Y_1		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y_1	e
$*$		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	$+$	$*$		$\#$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$+$	y	$-$		Y_1		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y_1	$*$
$*$		N		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$\bullet$	$-$	y		$-$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$-$	y	y		Y_1		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y_1	y
$+$		Y		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y	$+$	n		$-$		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	$-$	n	n		Y_1		$\#$	$\rightarrow$	$\#$	Y_1	n

Simulating a CTAG by an RPCA P_{98} (1)

Example Consider a CTAG C_3 with an initial word NYY.

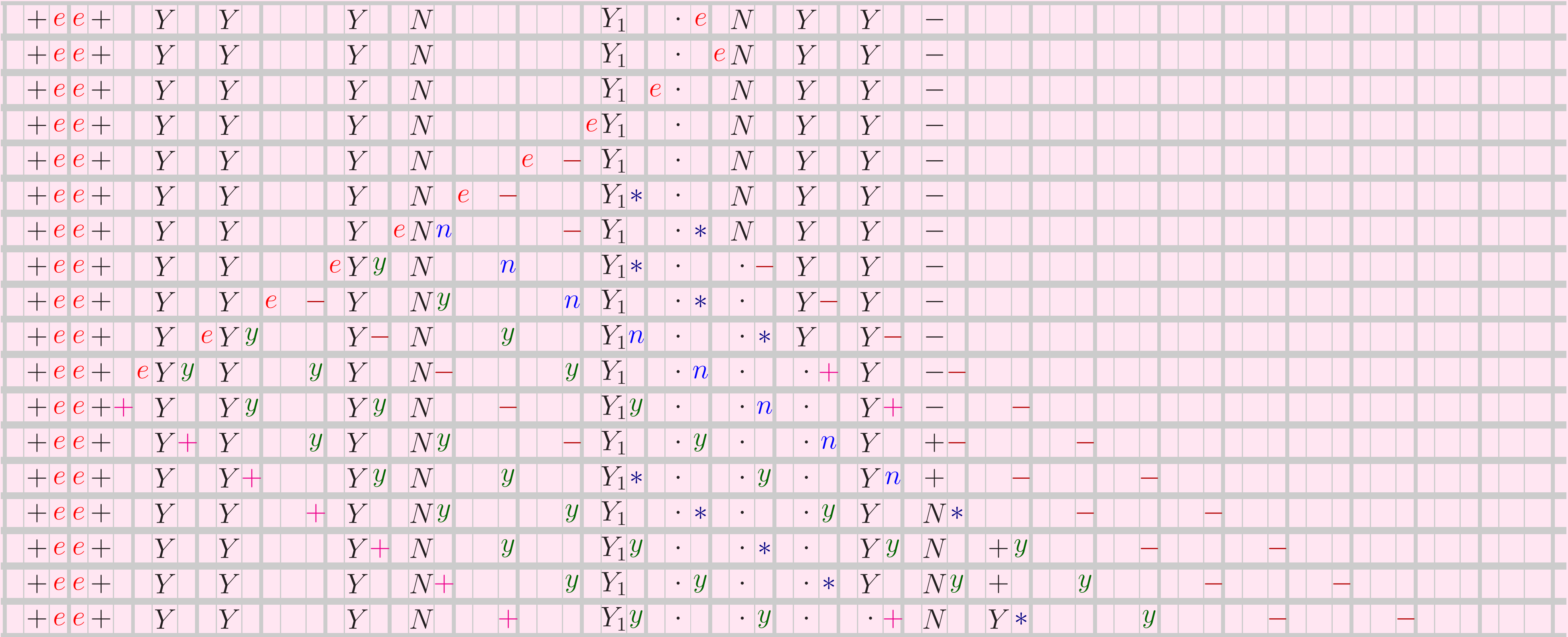
$$C_3 = (3, \{Y, N\}, (\varepsilon,\ NY,\ YY))$$

Then, the initial configuration of P_{84} is as follows:



- The signal e goes back and forth between the left end and the head of a rewritten word.

Simulating a CTAG by an RPCA P_{98} (2)



$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ Y_1\ \cdot\ e\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ Y_1\ \cdot\ e\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ Y_1\ e\ \cdot\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ e\ Y_1\ \cdot\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ e\ -\ Y_1\ \cdot\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ e\ -\ Y_1\ *\ \cdot\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ e\ N\ n\ -\ Y_1\ \cdot\ *\ N\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ e\ Y\ y\ N\ n\ Y_1\ *\ \cdot\ \cdot\ -\ Y\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ e\ -\ Y\ N\ y\ n\ Y_1\ \cdot\ *\ \cdot\ Y\ -\ Y\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ e\ Y\ y\ Y\ -\ N\ y\ Y_1\ n\ \cdot\ \cdot\ *\ Y\ Y\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ e\ Y\ y\ Y\ y\ Y\ N\ -\ y\ Y_1\ \cdot\ n\ \cdot\ \cdot\ +\ Y\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ +\ Y\ Y\ y\ Y\ y\ N\ -\ Y_1\ y\ \cdot\ \cdot\ n\ \cdot\ Y\ +\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ +\ Y\ y\ Y\ N\ y\ -\ Y_1\ \cdot\ y\ \cdot\ \cdot\ n\ Y\ +\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ +\ Y\ y\ N\ y\ Y_1\ *\ \cdot\ \cdot\ y\ \cdot\ Y\ n\ +\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ +\ Y\ N\ y\ y\ Y_1\ \cdot\ *\ \cdot\ \cdot\ y\ Y\ N\ *\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ +\ N\ y\ Y_1\ y\ \cdot\ \cdot\ *\ \cdot\ Y\ y\ N\ +\ y\ -\ -$

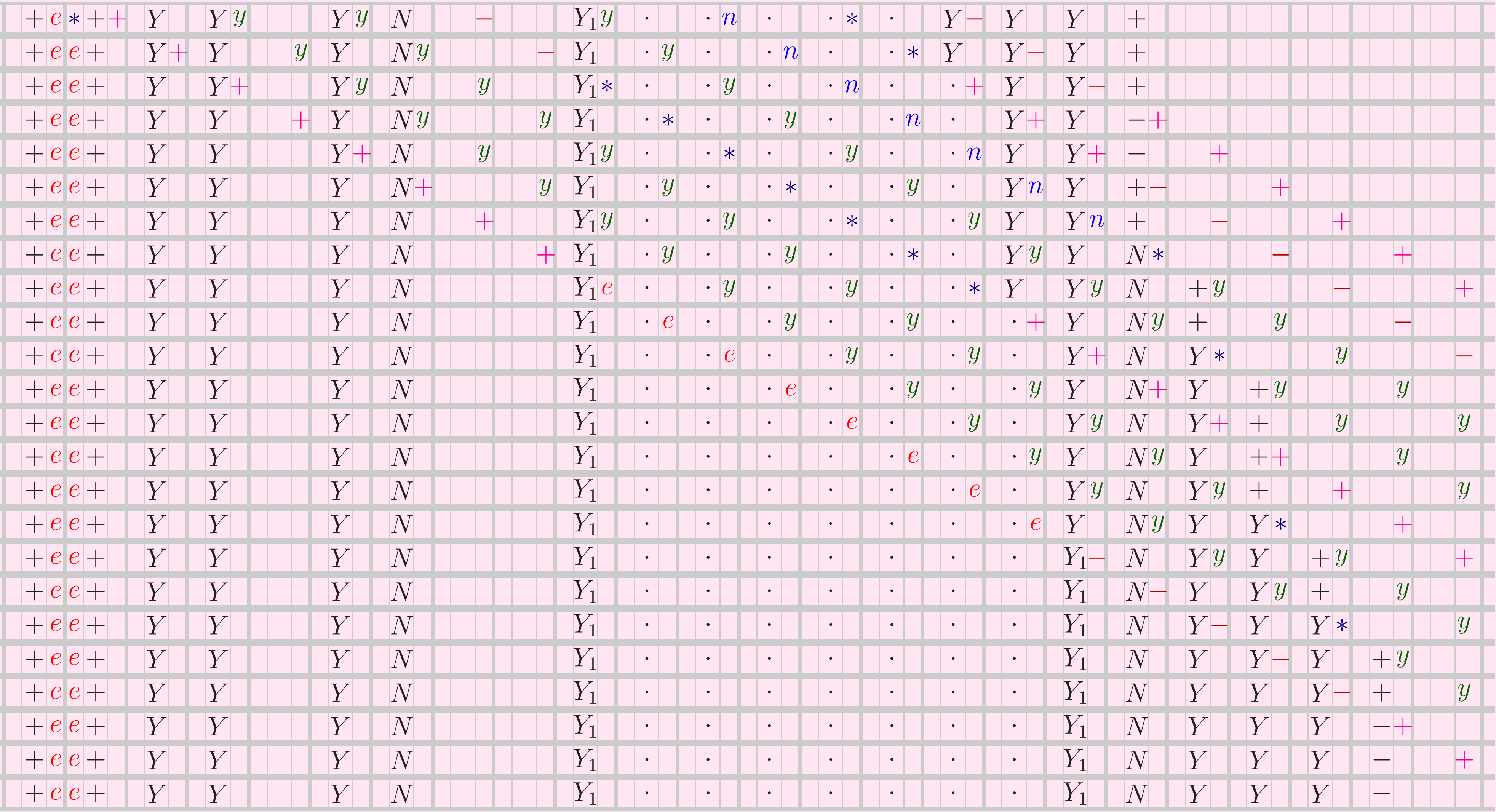
$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ +\ y\ Y_1\ \cdot\ y\ \cdot\ \cdot\ *\ Y\ N\ y\ +\ y\ -\ -$

$+\ e\ e\ +\ Y\ Y\ Y\ N\ +\ Y_1\ y\ \cdot\ \cdot\ y\ \cdot\ \cdot\ +\ N\ Y\ *\ y\ -\ -$

Simulating a CTAG by an RPCA P_{98} (3)

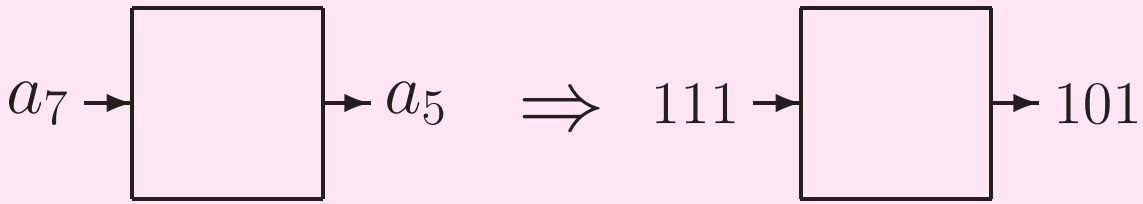
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N							+		Y_1			·	y		·			·	y		·			N	+		Y			+	y						y						−						−			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1	e		·			·	y		·			·	y		N			Y	+		+				y						y						−						−
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·	e		·			·	y		·			N	y		Y			+	+						y						y						−			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·	e		·			·	y		N			Y	y		+				+						y						y						−
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·	e		·			N	y		Y			Y	*						+						y						y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·	e		N			Y	y		Y			+	y						+						y						y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·		e	N			Y			Y	y		+				y						+						y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·		e	·			N			Y			Y			Y	*						y						+						y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·		e	·			·			N			Y			Y			Y			+	y						y						+			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·		e	·			·			·			N			Y			Y			Y			+				y						y						+
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1		e	·			·			·			·			N			Y			Y			Y			+							y						y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N								e	Y_1			·			·			·			·			N			Y			Y			Y			+										y						y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N					e		−		Y_1			·			·			·			·			N			Y			Y			Y			+													y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N		e		−					Y_1	*		·			·			·			·			N			Y			Y			Y			+																y
	+	e	e	+			Y			Y						Y		e	N	n						−		Y_1			·	*		·			·			·			N			Y			Y			Y			+																
	+	e	e	+			Y			Y					e	Y	y		N				n					Y_1	*		·			·	*		·			·			N			Y			Y			Y			+																
	+	e	e	+			Y			Y		e		−		Y			N	y						n		Y_1			·	*		·			·	*		·			N			Y			Y			Y			+																
	+	e	e	+			Y		e	Y	y					Y	−		N				y					Y_1	n		·			·	*		·			·	*		N			Y			Y			Y			+																
	+	e	e	+		e	Y	y		Y				y		Y			N	−						y		Y_1			·	n		·			·	*		·			·	−		Y			Y			Y			+																

Simulating a CTAG by an RPCA P_{98} (4)



	+	e	*	+	+		Y			Y	y					Y	y		N				−					Y_1	y		·			·	n		·			·	*		·			Y	−		Y			Y			+																	
	+	e	e	+			Y	+		Y				y		Y			N	y						−		Y_1			·	y		·			·	n		·			·	*		Y			Y	−		Y			+																	
	+	e	e	+			Y			Y	+					Y	y		N				y					Y_1	*		·			·	y		·			·	n		·			·	+		Y			Y	−		+																	
	+	e	e	+			Y			Y				+		Y			N	y						y		Y_1			·	*		·			·	y		·			·	n		·			Y	+		Y			−	+															
	+	e	e	+			Y			Y						Y	+		N				y					Y_1	y		·			·	*		·			·	y		·			·	n		Y			Y	+		−				+												
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N	+						y		Y_1			·	y		·			·	*		·			·	y		·			Y	n		Y			+	−						+									
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N				+					Y_1	y		·			·	y		·			·	*		·			·	y		Y			Y	n		+				−						+						
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N							+		Y_1			·	y		·			·	y		·			·	*		·			Y	y		Y			N	*						−						+			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1	e		·			·	y		·			·	y		·			·	*		Y			Y	y		N			+	y						−						+
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·	e		·			·	y		·			·	y		·			·	+		Y			N	y		+				y						−			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·	e		·			·	y		·			·	y		·			Y	+		N			Y	*						y						−
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·	e		·			·	y		·			·	y		Y			N	+		Y			+	y						y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·	e		·			·	y		·			Y	y		N			Y	+		+				y						y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·	e		·			·	y		Y			N	y		Y			+	+						y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·	e		·			Y	y		N			Y	y		+				+						y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·	e		Y			N	y		Y			Y	*						+			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1	−		N			Y	y		Y			+	y						+
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N	−		Y			Y	y		+				y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N			Y	−		Y			Y	*						y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N			Y			Y	−		Y			+	y			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N			Y			Y			Y	−		+				y
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N			Y			Y			Y			−	+			
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N			Y			Y			Y			−				+
	+	e	e	+			Y			Y						Y			N									Y_1			·			·			·			·			·			·			·			Y_1			N			Y			Y			Y			−					

Binary Coding of I/O Symbols of Reversible Sequential Machines (RSMs)



Lemma Let M be an RSM with m states and n I/O symbols. For simplicity, we assume $n = 2^k$ for some k. Then, there is an equivalent RSM M' with $m \cdot n \cdot k/2$ states and 2 I/O symbols.

Note: We can use a starightforward coding method to get M'. An important point is to see M' is also reversible under such encoding.

A 40-state Universal RPCA P_{40}

$$
\begin{aligned}
L &= \{\#\}, \\
C &= \{N, Y, n, y, -, +, \cdot, *, \$, /\}, \\
R &= \{n, y, *, \$\}.
\end{aligned}
$$

g_{40}:

n	$\cdot$		$\rightarrow$	$\cdot$	n	$*$	Y		$\rightarrow$	y	$\$$	n	$-$		$\rightarrow$	$-$	n
y	$\cdot$		$\rightarrow$	$\cdot$	y	$*$	n		$\rightarrow$	$*$	n	y	$-$		$\rightarrow$	$-$	y
$*$	$\cdot$		$\rightarrow$	$\cdot$	$*$	$*$	y		$\rightarrow$	$*$	y	n	$+$		$\rightarrow$	N	$*$
n	Y		$\rightarrow$	Y	n	$*$	$*$		$\rightarrow$	$\cdot$	$\$$	y	$+$		$\rightarrow$	Y	$*$
y	Y		$\rightarrow$	Y	y	$\$$	$-$		$\rightarrow$	$\$$	n	$*$	$/$		$\rightarrow$	$+$	n
$\$$	Y		$\rightarrow$	Y	$\$$	$\$$	$+$		$\rightarrow$	$\$$	y	n	$/$		$\rightarrow$	$/$	n
n	N		$\rightarrow$	N	n	n	$\$$		$\rightarrow$	n	n	y	$/$		$\rightarrow$	$/$	y
y	N		$\rightarrow$	N	y	y	$\$$		$\rightarrow$	y	n	$\$$	$/$		$\rightarrow$	$/$	$\$$
$\$$	N		$\rightarrow$	N	$\$$	$\$$	n		$\rightarrow$	$-$	$\$$						
$*$	N		$\rightarrow$	n	$\$$	$\$$	y		$\rightarrow$	$+$	$\$$						

Since $|R| = 4$, it is convenient to give a universal RPCA with a 1-bit communication channel,

Simulating a CTAG by an RPCA P_{40}

$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	N	n	Y	n	Y	n	$-$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	n	$\$$	Y	n	Y	n	$-$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$*$	n	Y	$\$$	Y	n	$-$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$\$$	Y	n	Y	$\$$	$-$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	Y	$\$$	Y	n	$\$$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	Y	y	Y	$\$$	n	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	y	$\$$	Y	y	$-$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$*$	y	Y	$\$$	$-$	y	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$\$$	Y	y	$\$$	n	$/$	y	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	Y	$\$$	y	n	$/$	n	$/$	y	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	Y	n	$+$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	y	$/$	$\$$	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	Y	n	N	$*$	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	y	$/$	$\$$
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	y	$\$$	N	n	$+$	n	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	n	$/$	y
$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$*$	y	N	$\$$	N	$*$	$/$	n	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$\$$	N	y	N	$\$$	$+$	n	$/$	n	$/$	$\$$	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	N	$\$$	N	y	$\$$	y	$/$	n	$/$	n	$/$	$\$$
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	N	y	N	$\$$	y	n	$/$	y	$/$	n	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	N	n	N	y	$+$	$\$$	$/$	n	$/$	y	$/$	n
$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	n	$\$$	N	n	Y	$*$	$/$	$\$$	$/$	n	$/$	y
$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$*$	n	N	$\$$	Y	n	$+$	n	$/$	$\$$	$/$	n
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$\$$	N	n	Y	$\$$	N	$*$	$/$	n	$/$	$\$$
$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	N	y	N	$\$$	Y	n	N	$\$$	$+$	n	$/$	n
$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	N	y	Y	$\$$	N	n	$\$$	y	$/$	n
$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	n	$\$$	Y	y	N	$\$$	n	n	$/$	y
$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	y	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	$*$	$\cdot$	n	$\cdot$	n	$\cdot$	$*$	$*$	n	Y	$\$$	N	y	$-$	$\$$	$/$	n

An RPCA P_{80} with 1-Bit Communication (1)

$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	N_0	0	Y_0	0	Y_0	0	$-_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1N$	0	${}_0Y$	0	${}_0Y$	0	${}_0-$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	n_1	1	Y_0	0	Y_0	0	$-_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1n$	1	${}_1Y$	0	${}_0Y$	0	${}_0-$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$*_0$	0	Y_1	1	Y_0	0	$-_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	${}_1*$	0	${}_0Y$	1	${}_1Y$	0	${}_0-$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_1$	1	Y_0	0	Y_1	1	$-_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	1	${}_1Y$	0	${}_0Y$	1	${}_1-$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	Y_1	1	Y_0	0	$\$_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	${}_0Y$	1	${}_1Y$	0	${}_0\$$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	Y_1	0	Y_1	1	n_0	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1Y$	1	${}_0Y$	1	${}_1n$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	y_1	1	Y_1	0	$-_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1y$	1	${}_1Y$	1	${}_0-$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$*_1$	0	Y_1	1	$-_1$	0	$/_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	${}_1*$	1	${}_0Y$	1	${}_1-$	1	${}_0/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	1	Y_1	0	$\$_0$	0	$/_1$	0	$/_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_0$	0
$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	1	${}_1Y$	1	${}_0\$$	0	${}_0/$	1	${}_0/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	Y_1	1	y_0	0	$/_0$	0	$/_1$	0	$/_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	${}_0Y$	1	${}_1y$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	1	${}_0/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	Y_0	0	$+_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_1$	0	$/_1$	1	$/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_0Y$	0	${}_0+$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	1	${}_0/$	1	${}_1/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	Y_0	0	N_0	1	$/_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_1$	0	$/_1$	1
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1Y$	0	${}_0N$	0	${}_1/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	1	${}_0/$	1
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	y_1	1	N_0	0	$+_0$	0	$/_1$	1	$/_0$	0	$/_0$	0	$/_1$	0

An RPCA P_{80} with 1-Bit Communication (2)

$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1y$	1	${}_1N$	0	${}_0+$	0	${}_0/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	1
$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$*_1$	0	N_1	1	N_0	1	${}/_0$	0	${}/_1$	1	${}/_0$	0	${}/_0$	0
$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	${}_1*$	1	${}_0N$	1	${}_1N$	0	${}_1/$	0	${}_0/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_1$	1	N_1	0	N_1	1	${}+_0$	0	${}/_0$	0	${}/_1$	1	${}/_0$	0
$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	1	${}_1N$	1	${}_0N$	1	${}_1+$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	1	${}_1/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	N_1	1	N_1	0	${}\$_1$	0	${}/_0$	0	${}/_0$	0	${}/_1$	1
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	${}_0N$	1	${}_1N$	1	${}_0\$$	1	${}_0/$	0	${}_0/$	0	${}_0/$	1
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	N_1	0	N_1	1	y_0	0	${}/_1$	0	${}/_0$	0	${}/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_0N$	1	${}_0N$	1	${}_1y$	0	${}_0/$	1	${}_0/$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	N_0	0	N_1	0	${}+_1$	1	${}/_0$	0	${}/_1$	0	${}/_0$	0
$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1N$	0	${}_0N$	1	${}_0+$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	1	${}_0/$	0
$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	n_1	1	N_0	0	Y_0	1	${}/_1$	1	${}/_0$	0	${}/_1$	0
$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1n$	1	${}_1N$	0	${}_0Y$	0	${}_1/$	1	${}_1/$	0	${}_0/$	1
$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$*_0$	0	N_1	1	Y_0	0	${}+_0$	0	${}/_1$	1	${}/_0$	0
$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	${}_1*$	0	${}_0N$	1	${}_1Y$	0	${}_0+$	0	${}_0/$	1	${}_1/$	0
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_1$	1	N_0	0	Y_1	1	N_0	1	${}/_0$	0	${}/_1$	1
$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	1	${}_1N$	0	${}_0Y$	1	${}_1N$	0	${}_1/$	0	${}_0/$	1
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	N_1	1	Y_0	0	N_1	1	${}+_0$	0	${}/_0$	0
$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	${}_0N$	1	${}_1Y$	0	${}_0N$	1	${}_1+$	0	${}_0/$	0
$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	N_1	0	Y_1	1	N_0	0	${}\$_1$	0	${}/_0$	0
$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1N$	1	${}_0Y$	1	${}_1N$	0	${}_0\$$	1	${}_0/$	0
$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	n_1	1	Y_1	0	N_1	1	n_0	0	${}/_1$	0
$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	1	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$1\cdot$	0	$0\cdot$	0	$0\cdot$	0	$1\cdot$	0	${}_1n$	1	${}_1Y$	1	${}_0N$	1	${}_1n$	0	${}_0/$	1
$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_1$	0	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	1	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	0	$\cdot_0$	1	$*_0$	0	Y_1	1	N_1	0	$-_1$	1	${}/_0$	0

Concluding Remarks

Universal 1D RCAs:

- Simulating reversible Turing machines (RTMs):
  - 3240-state 2W-RCA (on finite configurations)
- Simulating cyclic tag systems:
  - 30-state 1W-RCA (on infinite configurations)
  - 98-state 2W-RCA (on finite configurations)
  - 80-state 1W-RCA with 1-bit communication channel (on infinite configurations)